Zweiter Brief von Johannes Hudde, über Maxima und Minima *

Johann Hudde

Mein teuerster Freund,

was meine Methode der Maxima und Minima betrifft, werde ich versuchen, sie hier kurz zu beschreiben, und vor allem werde ich das folgende Theorem beweisen:

Theorem

Wenn in einer Gleichung zwei gleiche Wurzeln enthalten sind, und die Gleichung mit einer beliebigen arithmetischen Progression multipliziert wird, natürlich der erste Term der Gleichung mit dem ersten Term der Progression, der zweite Term der Gleichung mit dem zweiten Term der Progression und so fort, dann behaupte ich: Das Produkt wird eine Gleichung sein, in welcher nur eine einzige der besagten Wurzeln gefunden werden wird.
Für dieses Ziel nehme man eine beliebige Gleichung, in welcher x die unbekannte Größe bezeichne, wie, eines Beispiels wegen diese Gleichung

$$x^3 + pxx + qx + r = 0,$$

und man multipliziere sie mit $xx - 2yx + yy = 0$, das heißt, mit einer Gleichung, in welcher zwei Wurzeln gleich sind, und man wird diese Gleichung haben

*Originaltitel: "Johannis Huddenii Epistula secunda, de Maxima et Minima", zuerst publiziert in „*Geometria a Renato Descartes*, 1637, pp. 507-516", übersetzt von: Alexander Aycock im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$\left.\begin{array}{lll} xx - 2yx + yy & \text{mal} & x^3 \\ xx - 2yx + yy & \text{mal} & pxx \\ xx - 2yx + yy & \text{mal} & qx \\ xx - 2yx + yy & \text{mal} & r \end{array}\right\} = 0.$$

In dieser sind auch zwei gleiche Wurzeln erfasst, natürlich $x = y$, und noch einmal $x = y$. Oder wenn wir jene mit $xx + 2yx + yy = 0$ multipliziert hätten, hätten wir zwei falsche gleiche Wurzeln erhalten, auf welche Weise auch immer aber diese Multiplikation geschieht, wenn für y sein Wert eingesetzt wird, wird man haben

$$\left.\begin{array}{lll} xx - 2xx + xx & \text{mal} & x^3 \\ xx - 2xx + xx & \text{mal} & pxx \\ xx - 2xx + xx & \text{mal} & qx \\ xx - 2xx + xx & \text{mal} & r \end{array}\right\} = 0.$$

Wenn nun irgendeines dieser vier Produkte, oder, was sich auf dasselbe reduziert, $+1$, -2, $+1$ (weil ja durch xx geteilt werden kann, und die Multiplikatoren x^3, pxx, qx, r keine Veränderung bewirken) mit einer arithmetischen Progression multipliziert wird: Dann wird das Produkt dieser Multiplikation $= 0$ sein.
Denn

$$\begin{array}{rrrr} \text{Mult.} & +\,1, & -\;2, & +\;1, \\ \text{mit} & a & a\;+\;b & a+2b \\ \hline \text{es ist} & a & -\,2a-2b\,+ & a+2b \\ \text{oder} & +\,2a & -\,2a+2b & -\,2b = \;0. \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} \text{Mult.} & +\,1, & -\;2, & +\;1, \\ \text{mit} & a & a\;-\;b & a-2b \\ \hline \text{es ist} & a & -\,2a+2b & a-2b \\ \text{oder} & 2a & -\,2a+2b & -\,2b = \;0. \end{array}$$

Bis zu diesem Punkt habe ich allgemein alle Gleichungen betrachtet, die zwei gleiche Wurzeln haben, auf welche Weise auch immer sie vorgelegt werden, das heißt, ob in ihnen gewisse Terme fehlen oder nicht, und auf welche Weise auch immer es sich mit den Vorzeichen $+$ und $-$ verhält. Denn dir aufmerksamen Leser wird es schnell offenkunding sein, dass für uns in dieser Sache

nur die Zahlen $+1$, -2, $+1$ von Interesse sind, nicht aber die Multiplikatoren x^3, pxx, qx und r.
Gleichermaßen bleibt die Betrachtung bezüglich der arithmetischen Progression allgemein, weil ja die zwei ersten Terme a, $a+b$ und a, $a-b$ unbestimmt sind. Was übrig ist, wird allein aus Begutachtung des vorhergehenden Beispiels, wenn man die zwei folgenden Multiplikationen betrachtet, klar werden.

$$\begin{array}{l}
x^3 + pxx + qx + r = 0 \\
\underline{xx - 2xx + xx \qquad = 0} \\
\left.\begin{array}{l}
xx - 2xx + xx \ \text{ mal } \ x^3 \\
xx - 2xx + xx \ \text{ mal } \ pxx \\
xx - 2xx + xx \ \text{ mal } \ qx \\
xx - 2xx + xx \ \text{ mal } \ r
\end{array}\right\} = 0.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x^3 + pxx + qx + r = 0 \\
\underline{xx - 2xy + yy \qquad = 0} \\
\left.\begin{array}{l}
x^5 - 2yx^4 + yyx^3 \\
\quad + px^4 - 2pyx^3 + pyyxx \\
\qquad\qquad + qx^3 - 2qyxx + qyyx \\
\qquad\qquad\qquad + rxx - 2ryx + ryy
\end{array}\right\} = 0.
\end{array}$$

Mult. mit a, $a \pm b$, $a \pm 2b$, $a \pm 3b$, $a \pm 4b$, $a \pm 5b$. Denn weil diese Produkte $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$ und $xx - 2xx + xx$ mal x^3 dieselben sind, wird auch $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$ multipliziert mit a, $a \pm b$, $a \pm 2b$ gleich 0 sein; so und weil ja $+px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ dasselbe ist wie $xx - 2xx + xx$ mal pxx, wird auch $px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ multipliziert mit $a \pm b$, $a \pm 2b$, $a \pm 3b$ (weil ja, wie aus dem Vorhergehenden klar ist, der erste Term der Progression nach Belieben angenommen werden kann) gleich 0 sein, und so fort. Daher geschieht es, dass auch das Produkt der ganzen Gleichung mit dieser proportional zu 0 wird, und dass ein Wert von $x = y$, welcher einer der zwei gleichen Wurzeln ist, notwending eingeschlossen wird. Und weil man hier wiederum die Menge oder Häufigkeit oder die Anzahl der Multiplikatoren nicht von Belang ist, so ist das vorgelegte Theorem für beliebige Gleichungen, die gleiche Wurzeln haben, allgemein gezeigt.
Hieraus ergibt sich:
Wenn in einer Gleichung 3 Wurzeln gleich sind und die Gleichung mit einer beliebigen arithmetischen Progression multipliziert wird, werden in gleicher Weise wie just erläutert im Produkt noch zwei dieser drei gleichen Wurzeln zurück bleiben; und daher wird dieses Produkt erneut mit einer arithmetischen Progression multipliziert werden können. Wenn aber in der vorgelegten Gleichung vier Wurzeln gleich waren, und sie mit einer arithmetischen Progression multipliziert wird, werden in diesem Produkt noch 3 der 4 gleichen Wurzeln zurück bleiben, und so fort, wie viele gleiche Wurzeln auch immer

die vorgelegte Gleichung hatte, durch die einzelnen Multiplikationen von dieser Art wird jeweils eine der gleichen Wurzeln eliminiert werden.

Nachdem dies also bewiesen worden ist, gehe ich zu meiner Methode der Maxima und Minima über, welche sich wie folgt verhält.

Nachdem wie viele algebraische Größen auch immer festgelegt worden sind, die ein Maximum oder Minimum bezeichnen, setze man sie $= z$; und nach Sortieren der Gleichung multipliziere man sie in der erläuterten Weise mit einer arithmetischen Progression: Und das Produkt wird eine Gleichung sein, die eine Wurzel mit der vorhergehenden gemein hat.
Sodass zum Beweis dieser Methode nur noch zu prüfen ist, dass jene erste Gleichung zwei gleiche Wurzeln enthält. Dies ist freilich dermaßen leicht zu beweisen, dass es unnötiger Aufwand wäre, dies vollkommen auszuführen.
Und dies ist meine allgemeine Methode. In der Tat resultieren daraus einige spezielle Ergebnisse, welche du zuvor schon in bestimmten Beispielen gesehen hast, so wie sich aus den beigefügten Operationen, in jeder der beiden Arten durchgeführt, sehen lässt.
1. Wenn die algebraischen Terme, die das Maximum oder Minimum bezeichnen, nur eine unbekannte Größe beeinhalten und keine Brüche involvieren, in deren Nenner die unbekannte Größe gefunden wird, multipliziere ich lediglich jeden Term mit der Anzahl der Dimensionen der unbekannten Größe, wobei alle Größen außer Acht gelassen werden, in denen die unbekannte Größe nicht aufgefunden wird, und ich nehme das Produkt $= 0$ an.
Eines Beispiels wegen sei $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab =$ einem bestimmten Maximum. Du hast also

$$\begin{array}{lcccc} & 3ax^3 & - \; bx^3 & - \; \dfrac{2bba}{3c}x & \\ \text{mult. mit} & 3 & 3 & 1 & \\ \hline \text{es wird} & 9ax^3 & - \; 3bx^3 & - \; \dfrac{2bba}{3c}x = 0 & \text{oder} \quad 9axx - 3bxx - \dfrac{2bba}{3c} = 0. \end{array}$$

Gemäß der allgemeinen Methode wird gelten

$$\begin{array}{l} 3ax^3 - bx^3 - \dfrac{2bba}{3c}x + aab = 0. \\ \hphantom{3ax^3 - bx^3 - \dfrac{2bba}{3c}x} - \; z \end{array}$$

$$\text{mult. mit der arithm. Progr.} \qquad 3. \qquad 3. \qquad 1. \qquad 0.$$

$$\text{und es ist wie zuvor} \quad 9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x = 0, \quad \text{oder}$$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0.$$

2. Wenn die algebraischen Terme, die das Maximum oder Minimum bezeichnen, nur eine unbekannte Größe erfassen, und einige Brüche zulassen, in deren Nenner die unbekannte Größe gefunden wird, wird die Operation auf diese Weise durchgeführt werden können.
Zuerst streiche ich alle bekannten Größen. Dann, wenn die übrigen Größen nicht von derselben Dimension waren, bringe ich sie auf denselben Hauptnenner. Nachdem dies getan worden ist, betrachte ich den ganzen Zähler dieses Bruches zusammen mit irgendeinem Glied oder einem separiertem Teil des Nenners (wenn er aus verschiedenen Teilen besteht) als eine Größe, die das Maximum oder Minimum bezeichnet, und das einzelne Glied oder den separierten Teil des Zählers multipliziere ich mit der Anzahl der Dimensionen der unbekannten Größe dieses Glieds, nachdem von derselben Zahl die Anzahl der Dimensionen der unbekannten Größen abgezogen worden ist, welche in diesem Glied des Nenners gefunden wird; und nachdem das Produkt mit diesem Glied des Nenners multipliziert worden ist, werden alle Produkte solcher Art = 0 sein, wie aus den folgenden Beispielen noch deutlicher werden wird.

1. Beispiel

Es sei also $\frac{4aab^3+5a^3x+x^5}{x^3} - ax + bx + ab$ = einem bestimmten Maximum. Nachdem die bekannte Größe ab gestrichen worden ist, und die übrigen Terme auf den gleichen Nenner gebracht worden sind, wird man erhalten

$$\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4}{x^3}$$

$$\begin{array}{rccccccl} \text{Mult. Zähler mit} & -3 & -2 & +2 & +1 & +1: & & \\ \hline \text{es ist} & -12aab^3 & -10a^3x & +2x^3 & -ax^4 & +bx^4 & \text{mult. mit} & x^3 = 0 \end{array}$$

Und indem man durch x^3 teilt:

$$-12aab^3 - 10a^3x + 2x^3 - ax^4 + bx^4 = 0$$

Gemäß der allgemeinen Methode

$$\begin{array}{rl} \text{ist} & \dfrac{4aab^3+5a^3x+x^5}{x^3} - ax + bx + ab = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - z \\ \hline \text{das heißt} & 4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4 + abx^3 = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - z \end{array}$$

Oder nach Ordnen der Gleichung

$$\begin{array}{llllll} x^5 & -ax^4 + & abx^3 & + \; 5a^3x & + \; 4aab^3 & = 0 \\ & +b \quad - & z & & & \\ -2, & +1, & 0, -1, & -2, & -3 & \\ \hline 2x^5 & -ax^4 & & -10a^3x & -12aab^3 & = 0 \\ & +b & & & & \end{array}$$

2. Beispiel

Es sei also $\frac{baax+aaxx-bx^3-x^4}{baa+x^3} - a + x =$ einem bestimmten Maximum. Nachdem die bekannte Größe a gestrichen worden ist und die übrigen auf denselben Nenner gebracht worden sind, wird man $\frac{2baax+aaxx-bx^3}{baa+x^3}$ haben.

$$\left.\begin{array}{rccccc} \text{Weiter schreibe ich für} & \overset{+1,\quad +2,\quad +3}{\dfrac{2baax+aaxx-bx^3}{baa}} & \text{hier} & 2baax+2aaxx-2bx^3 & \text{mal} & baa \\ \text{Für} & \overset{-2,\quad -1,\quad 0}{\dfrac{2baax+aaxx-bx^3}{x^3}} & \text{schreibe ich} & -4baax-aaxx & \text{mal} & x^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Nachdem durch aax geteilt worden ist, wird man haben

$$\left.\begin{array}{lll} 2baa+2aax-3bxx & \text{mal} & b \\ & & \\ -4bx-xx & \text{mal} & xx \end{array}\right\} = 0$$

und daher

$$-x^4 - 4bx^3 - 3bbxx + 2aabx + 3bbaa = 0.$$

Wenn also $\frac{2baax+aaxx-bx^3+a^4}{4x^3+2bxx-3aax-c^3}$ = einem bestimmten Maximum war,

$$\left.\begin{array}{rcllcc}
\text{Schreibe ich für} & \begin{array}{c} -2,\quad -1,\quad +0,\quad +1, \\ \dfrac{2baax+aaxx-bx^3+a^4}{4x^3} \end{array} & \text{hier} & -4baax-aaxx-3a^4 & \text{mal} & 4x^3 \\
\text{Für} & \begin{array}{c} -1,\quad 0,\quad +1,\quad -1 \\ \dfrac{2baax+aaxx-bx^3+a^4}{2bxx} \end{array} & \text{schreibe ich} & -2baax-bx^3-3a^4 & \text{mal} & 2bxx \\
\text{Für} & \begin{array}{c} 0,\quad +1,\quad +2,\quad -1 \\ \dfrac{2baax+aaxx-bx^3+a^4}{-3aax} \end{array} & \text{schreibe ich} & +aaxx-2bx^3-a^4 & \text{mal} & -3aax \\
\text{Für} & \begin{array}{c} 1,\quad 2,\quad 3,\quad 0 \\ \dfrac{2baax+aaxx-bx^3+a^4}{-c^3} \end{array} & \text{schreibe ich} & +2baax+2aaxx-3bx^3 & \text{mal} & -c^3
\end{array}\right\} = 0.$$

Gemäß der allgemeinen Methode

$$\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} = z$$

oder

$$2baax + aaxx - bx^3 = baaz + x^3z$$

oder

$$\begin{aligned} &-\ bx^3 + aaxx + 2baax - baaz = 0 \\ &-\ z \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcccl}
\text{Arith. Progr.} & 3 & 2 & 1 & \quad 0 \\
\hline
 & -\ 3bx^3 & +\ 2aaxx & +\ 2baax & = 0, \quad \text{das heißt} \\
 & -\ \ 3z & & &
\end{array}$$

$$\frac{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax}{3x^3} = z$$

und daher

$$\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} = \frac{+2baax + 2aaxx - 3bx^3}{3x^3}$$

und wie oben $x^4 + 4bx^3 + 3bbxx - 2aabx - 2bbaa = 0$. Es ist daher klar, dass diese speziellen Regeln auf jener Regel basieren, wenn die Progression 0, 1, 2, 3, 4 etc. betrachtet wird und indem man natürlich den Term, in welchem die unbekannte Größe x nicht gefunden wird, mit 0 multipliziert; wo x eine Dimension hat, mit 1 und so weiter. Aber im Allgemeinen ist zu bemerken, dass, während, indem man gemäß der allgemeinen Methode vorgeht, sich jene arithmetische Progression nach Belieben annehmen lässt, immer jeder beliebige Term beseitigt werden kann, indem man ihn mit 0 multipliziert. Und so wird der Wert von z durch die eine arithemtische Progression leichter erhalten werden können als durch eine andere: wie, wenn im vorhergehenden Beispiel, wo wir mit 3, 2, 1, 0 multipliziert haben, mit 0, 1, 2, 3 multipliziert hätten, hätten wir erhalten:

$$aaxx + 4baax - 3baaz = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{xx + 4bx}{3b} = z.$$

Daher ist es klar, dass die Größe z (ob ein Maximum oder Minimum), wenn x als bekannt angenommen wird, auf verschiedene Arten gefunden und ausgedrückt werden kann, von welchen sich die leichteren für die Konstruktion auswählen lassen: Oder wenn z als bekannt angenommen wird, wird x auf ebenso viele Weisen gefunden werden können. Weiter, wenn man x und z als Unbekannte ansieht, werden wir, um die eine der beiden zu eliminieren, eine Gleichung zwischen den zwei einfachsten Werten aufstellen können: Wie, im oberen Beispiel, zwischen

$$z = \frac{-3bxx + 2aax + 2baa}{3xx} \quad \text{und} \quad z = \frac{xx + 4bx}{3b}.$$

3. Wenn die algebraischen Terme, die das Maximum oder Minimum bezeichnen, mehr als eine Unbekannte einschließen, nehme ich sie $= z$ an; und durch diese Gleichung und die übrigen gegebenen Größen oder die, die aus der Natur des Problems folgen, (denn davon existieren immer zugleich, wenn sie alle Bedingungen des Problems einschließen, so viele wie unbekannte Größen vorhanden sind weniger 1; natürlich, wenn nur ein Maximum oder Minimum zwischen unendlichen Größen gesucht wird, nicht aber zwischen unendlich vielen Maxima), so reduziere ich alle Gleichungen auf eine, in welcher notwendigerweise zwei unbekannte Größen enthalten sein werden, und eine

davon ist z. Und weil dann allein z bekannt sein muss, um das Maximum oder Minimum zu finden, ist es offenkundig, dass für dieses Ziel zu bedenken ist, dass die andere unbekannte Größe zwei gleiche Wurzeln hat.
Wir wollen, eines Beispiels wegen, drei Gleichungen nehmen, in denen ich den maximale Ausdehnung einer Kurve bestimmt habe, wie man sie auf Seite 498 der *Excercitationes* deiner Mathematiker findet; ich nenne das Maximum, im Gegensatz zu dort, hier bloß z, und was dort z genannt worden ist, nenne ich hier v.

$$\text{1. Gl.} \quad y^3 - nyx + x^3 = 0$$

$$\text{2. Gl.} \quad v - x = y$$

$$\text{3. Gl.} \quad \frac{1}{3}v - y = z \quad \text{dem Maximum}$$

Nachdem der Wert von y der 2. Gleichung anstelle von y der 1. und 3. Gleichung eingesetzt worden ist, wird man haben

$$\begin{array}{ll} \text{für die 1. Gl.} & v^3 - 3vvx + 3vxx = vnx - nxx \\ \text{für die 3. Gl.} & x = z + \frac{1}{2}v \end{array}$$

Nachdem aber der Wert von x der 3. Gleichung für x in der 1. Gleichung eingesetzt worden sind, wird man finden

$$\begin{array}{rl} \text{1. Gleichung} & \underline{\frac{1}{4}v^3 + 3vzz \ = \frac{1}{4}nvv - nzz} \\ \text{oder} & \frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv \ + nzz = 0 \end{array}$$

Und diese Gleichung ist nun die einzig übrige, in welcher, damit die letzte Bedingung des Problems erfüllt wird, das heißt, dass sie so bestimmt wird, dass z ein Maximum wird, ich (so wie es dort gemacht worden ist) die

Gleichung

$$
\begin{array}{rlllll}
 & \frac{1}{4}v^3 & - \frac{1}{4}nvv & + 3zzv & + \ nzz & = 0 \\
\text{mit der arith. Prog. mult.} & 3. & 2. & 1. & 0 & \\
\hline
\text{und ich erhalte} & \frac{1}{4}v^3 & - \frac{1}{2}nvv & + 3zzv & & = 0 \\
\text{oder} & & 3zz & = \frac{1}{2}nv - \frac{1}{2}vv. & &
\end{array}
$$

Daher, nachdem der Wert von zz, welcher durch diese Gleichung gefunden worden ist, für selbigen in der vorausgehenden Gleichung $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz = 0$ eingesetzt worden ist, wird man erhalten

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + \frac{1}{2}nvv - \frac{1}{4}v^3 + \frac{1}{4}nnv - \frac{1}{2}nvv = 0 \\
\text{und ich erhalte} & - \frac{1}{2}v^3 + \frac{1}{3}nnv = 0 \\
\text{oder} & vv = \frac{1}{3}nn
\end{array}
$$

Wenn die arithmetische Progression 0, 1, 2, 3 gewesen wäre, hätten wir $3zz = \frac{nvv}{3v+4n}$ gefunden; wenn 2, 1, 0, -1, hätten wir $3zz = \frac{\frac{1}{2}v^3 - \frac{1}{4}vvn}{n}$ gehabt. Und ob der Wert von zz, egal durch welche der beiden dieser Gleichungen gefunden, in der vorhergehenden Gleichung $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz = 0$ eingesetzt wird, oder der eine dem anderen gleich gesetzt wird, man wird immer $vv = \frac{1}{3}nn$ erhalten. Aber obgleich die hier auf die eine oder andere Weise durchgeführten Operationen sich kaum unterscheiden, kann es dennoch oftmals passieren, wie ich auch oben angemerkt habe, dass die eine um vieles länger und schwieriger ist als eine andere, in welchem Fall natürlich der gefälligere Weg, welcher leicht erkannt wird, zu wählen ist.
Im Übrigen ist es anzumerken, dass diese letzte Gleichung $\frac{1}{4}v^3 + 3vzz = \frac{1}{4}nvv - nzz$ auch auf die zweite vorhergehende Weise bestimmt werden kann. Denn, während $zz = \frac{\frac{1}{4}nvv - \frac{1}{4}v^3}{3v+n}$ und $z =$ einem Maximum ist, wird auch dieser Wert von zz der größte von allen sein, und daher

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}nvv - \frac{2}{4}v^3 \ \text{ mal } \ 3v \\ \frac{2}{4}nvv - \frac{3}{4}v^3 \ \text{ mal } \ n \end{array}\right\} = 0 \qquad \text{das heißt,} \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}nv - \frac{6}{4}vv \\ \frac{2}{4}nn - \frac{3}{4}nv \end{array}\right\} = 0$$

nach div. durch vv

$$\text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}n - \frac{2}{4}v \ \text{ mal } \ 3v \\ \frac{2}{4}n - \frac{3}{4}v^3 \ \text{ mal } \ n \end{array}\right\} = 0 \qquad \text{oder} \quad \frac{2}{4}nn - \frac{6}{4}vv = 0 \qquad \text{oder} \quad \frac{1}{3}nn = vv.$$

Weil ja aber in vielen Fällen die zuletzt verbleibende Gleichung nicht so endet, dass der Wert von z oder zz oder z^3 etc. in Termen solcher Art, in denen z nicht auftritt, ausgedrückt werden kann, war es ratsam die allgmeine Methode anhand der Operation in diesem Beispiel aufzuzeigen.
Und hier, mein teuerster Freund, wären freilich noch viele Dinge zu sagen, aber damit mein Brief nicht allzu ausschweifend wird, möchte ich hier die Feder niederlegen; besonders, weil das, was hier verlangt wird, nicht schwer aus dem vorherigen abzuleiten ist. Aber damit es für dich nicht im Verborgenen bleibt, wovon ich glaube, dass es noch zu erwähnen wäre, möchte den Aufbau eines Traktates, welchen ich über dieses Gebiet vor 2 oder 3 Jahren ausgearbeitet habe, und welchem ich darüber hinaus neulich noch einmal kurz durchgesehen habe, hinzufügen. In diesem werden behandelt.

1. Methode über Maxima und Minima Algebraische Terme, die Maxima und Minima bezeichnen, werden betrachtet.

1.1. Entweder in Hinblick auf unsere Kenntnis, so dass wir sicher sind, dass in ihnen ein Maximum erfasst wird, wenn ein bestimmtes Maximum gegeben ist; oder ein Minimum, wenn ein gewisses Minimum gegeben ist. Aber diese algebraischen Terme enthalten
entweder lediglich eine unbekannte Größe, die

1.1.1.a entweder keinen Bruch beinhalten, in deren Nenner die unbekannte Größe gefunden wird
1.1.2.a oder Brüche enthalten, in deren Nenner die Unbekannte auftritt;
Oder diese algebraischen Terme enthalten *mehr als eine unbekannte Größe*, welche doppelte sind

1.1.1.b Entweder sind so viele Gleichungen zur selben Zeit mit ihnen gegeben, oder werden von der Natur des Problem eingeschlossen, wie es unbekannte Größen gibt weniger 1.

1.1.2.b Oder nicht so viele, oder sogar keine.

1.2 Oder in Hinblick auf unsere Unkenntnis, das heißt, wenn wir unwissend sind, ob in ihnen ein bestimmtes Maximum oder Minimum, oder jedes von beiden oder auch keines von beiden, enthalten ist. Dann betrachte ich selbige entweder als *absolut* oder *relativ* auf ein Problem bezogen.

2. Die Anwendung und die Nützlichkeit derselben, welche sich freilich sehr weit erstreckt, und besonders auf die Probleme, die andernfalls sehr schwer auf eine Gleichung reduziert werden können. Ein gutes Beispiel dessen ist *die Bestimmung aller Gleichungen*, welche allgemeine und nützliche Sache nur ein Korollar dieser Methode ist.

Sei gegrüßt, mein teuerster Freund, und bis bald

Johann Hudde, geschrieben am 6. Tage des Februar 1658 in Amsterdam